

平成 25 年度
広島市教育センター

中学校数学科図形領域における表現する能力を高める学習指導の工夫 －証明における根拠シートの活用を通して－

広島市立口田中学校教諭

加藤 慎也

研究の要約

本研究は、中学校第2学年「三角形・四角形」の図形領域における表現する能力を高める学習指導の工夫を行い授業実践に取り組んだ。研究を通して、表現する能力として、証明を書く力を定義し、評価規準を5段階で作成した。また、その具体として、証明問題ごとに詳しい評価規準表を作成し、証明を書く力について5段階で評価することとした。その結果、課題設定の工夫、根拠シートの活用、伝え合う活動の実施などの学習指導の工夫が有効であることが分かった。

キーワード：**表現する能力，根拠シート，証明を書く力，伝え合う活動，課題設定の工夫**

I 問題の所在

平成20年9月の『中学校学習指導要領解説 数学編』¹⁾ (以下「解説」とする。)では、「今回の改訂では、目標に「数学的活動を通して」と「表現する能力」が加えられた」とあり、表現する能力の重要性が述べられている。また、「中学校数学科では、日常的なものに止まらず、様々な事象を数理的にとらえ、考察し、表現したり処理したりする能力を高めることをねらいとした指導が行われる。」とあり、ここでも表現する能力に触れられている。

所属校の状況を見ると、平成25年度基礎・基本定着状況調査結果では、図形領域「垂線の作図過程でできた三角形がどんな三角形になるのか理由とともに答える」の設問の通過率が40.8%であり、さらに、アンケート結果を見ると「数学の授業では、解き方や考え方を話し合うときに理由をあげて説明しています」の設問に対して肯定的回答をした生徒の割合は45.6%であった。

これまでの自身の実践を振り返ると、一斉指導の時間が長くなる傾向があり、数学的な表現を使って、理由をあげて説明させる活動は十分ではなかったといえる。

そこで、推論の過程を正確に、しかも分かりやすく表現する能力を養うための学習指導の工夫について研究することとした。

II 研究の目的

図形領域における表現する能力を高める学習指導の工夫を図り、その有効性を探る。

III 研究の方法

- 1 研究主題に関する基礎的研究
- 2 研究仮説の設定
- 3 検証授業
- 4 検証授業の分析と考察

IV 研究の内容

1 研究主題に関する基礎的研究

(1) 表現する能力について

「解説」²⁾では、「第2学年の目標」の中で、「基本的な平面図形の性質について、観察、操作や実験などの活動を通して理解を深めるとともに、図形の性質の考察における数学的な推論の必要性と意味及びその方法を理解し、論理的に考察し表現する能力を養う。」とある。また、「第2学年においては、推論の過程を正確に、しかも分かりやすく表現する能力を養うことが指導の大切なねらいである。しかし、これは一挙に達成できるものではない。はじめは、根拠を明らかにして説明し伝え合う活動を通して、推論の過程を自分の言葉で他者に分かりやすく表現することを大切にす。」とある。このことから、ペアまたはグループによる伝え合う活動を取り入れることとした。

(2) 導入時における学習活動の工夫について

相馬(1995)³⁾は、「授業の中に予想を取り入れることによって、生徒の主体的で意欲的な学習が期待できる」と述べている。また、中原(1995)⁴⁾は、「操作的活動を活用した授業は、①楽しい授業、②わかりやすい授業、③活発な授業になると言われている」と述べている。このことから、予想や操作的活動を取り入れた導入時における学習活動を工夫することで、生徒の意欲が向上し、主体的な学習が可能となると考えた。

(3) 根拠シートについて

「解説」⁵⁾には、「「仮定」から出発し、すでに正しいと認められている事柄を根拠にして、「結論」を導くこと、それが証明である。」とある。また、「証明の過程においては、根拠となる事柄を明らかにすることが必要である。」とあり、根拠となる事柄を明確にすることの必要性が述べられている。

また、言葉や式、図、表、グラフなど様々な表現方法を、中原(1995)⁶⁾は五つの表現様式として以下(表1)のように分類している。思考の過程

や結果を様々な方法を用いて表現し、目標に達するまでに他の表現様式間、あるいは同じ表現様式の中での変換を通して理解を深めることができる。そこで、図、式、言葉が入った、既習事項を1枚のシートにまとめたものを作ることにした。さらに、既習事項は、授業が進むにつれて増えていくので、それが書き込める形式とした。

表1 表現様式の一覧

記号的表現(S2)	数字、文字、演算記号など数学的記号を用いた表現
言語的表現(S1)	日常言語を用いた表現
図的表現(I)	絵、図、グラフなどによる表現
操作的表現(E2)	半具体物をモデルとして操作する表現
現実的表現(E1)	実物を用いて、操作や実験をする表現

(4) 証明を書く力について

「解説」⁷⁾には、「まず証明の構想や方針をたて、その要点を言葉や用語、記号を適切に用いて自分の言葉で書くことから始め、よりよいものに改めることを大切にする。」とある。ここから本研究における「証明を書く力」を「証明を数学的な表現を適切に用いて自分の言葉で書く力」と定義し、以下(表2)のように評価規準を定め見取ることとした。

表2 証明を書く力の評価規準表

段階	内容
S	証明の思考過程や根拠を明確にして、数学的な用語や記号、図、式を適切に用いて筋道立てて、自分の言葉で書くことができる。
A	証明の思考過程や根拠を、数学的な用語や記号、図、式を適切に用いて筋道立てて、自分の言葉で書くことができる。
B	証明の思考過程を、数学的な用語や記号、図、式を用いて筋道立てて、自分の言葉で書くことができる。
C1	証明の思考過程を、数学的な用語や記号、図、式を用いて筋道立てて、自分の言葉で書くことができない。(見通しをもっている)
C2	証明の思考過程を、数学的な用語や記号、図、式を用いて筋道立てて、自分の言葉で書くことができない。(見通しをもっていない)

2 研究仮説の設定

図形領域における表現する能力を高める学習指

導の工夫を図ることで、推論の過程を正確に、しかも分かりやすく表現する能力が高まるであろう。

3 検証授業

(1) 検証授業の実際

ア 対象 広島市立口田中学校第2学年6組

イ 単元名 「三角形・四角形」

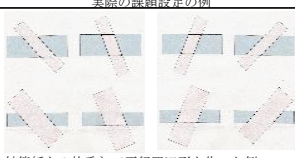
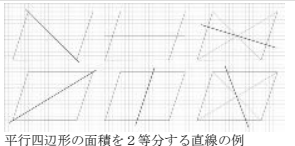



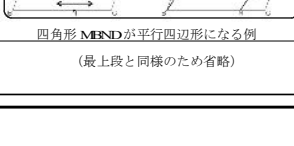
ウ 期間 平成26年1月15日～1月31日

(2) 学習指導計画の作成にあたって

ア 課題設定の工夫の実際

課題設定を工夫し、生徒が必然性をもって取り組める課題となるように設定した(表3)。

表3 単元計画と課題設定の工夫について

時	内容	課題設定の工夫	実際の課題設定の例
9 10 11	平行四辺形の性質	幅の異なる付箋紙2枚の操作から平行四辺形の性質を確認させ、証明に取り組みさせる。	 付箋紙を2枚重ねて平行四辺形を作った例
12	平行四辺形の性質を利用した証明	平行四辺形の面積を2等分する直線の条件を発見させ、その理由を考えさせる。	 平行四辺形の面積を2等分する直線の例
13	平行四辺形になるための条件	対辺の長さが等しくなるような四角形の模型を使って平行四辺形になる条件を証明させる。	 模型を動かしてできる平行四辺形の例
14		四角形を対辺の中点を結ぶ線分で分割し、その分割した四角形を再構成する活動から、平行四辺形になるための条件を証明させる。	 四角形を4分割しそれを再構成して平行四辺形になる例
15		ノートの罫線を使って平行四辺形になるための条件を発見させ、証明させる。	 ノートの罫線を使って平行四辺形をかいいた例
16 17	平行四辺形になるための条件を利用した証明	平行四辺形の1組の対辺上にそれぞれ点をとり新たに四角形を作図する。この四角形が平行四辺形になる条件を考えさせる。そのことを証明させる。	 四角形MENDが平行四辺形になる例 (最上段と同様のため省略)
18 19	特別な平行四辺形	2枚の付箋紙を重ねたときにできる図形を使って、特別な平行四辺形について考えさせる。	

イ 根拠シートの実際

第2学年単元名「三角形・四角形」の平行四辺形の性質や、平行四辺形になるための条件の証明に必要な要素を盛り込んだ根拠シートとなるように作成した(図1)。

2年()組()番 名前()

根拠シート

(1) 合同な図形の対応する辺は等しい

$AB=EF, BC=FG, CD=GH, DA=HE$

(2) 合同な図形の対応する角は等しい

$\angle A=\angle E, \angle B=\angle F, \angle C=\angle G, \angle D=\angle H$

(3) 対頂角は等しい

$\angle AOB=\angle COD, \angle AOD=\angle COB$

(4) 2直線が平行ならば、同位角は等しい

$AB//CD \Rightarrow \angle EPB=\angle FGD$

(5) 2直線が平行ならば、錯角は等しい

$AB//CD \Rightarrow \angle AFG=\angle DGF$

(6) 同位角が等しいければ、2直線は平行

$\angle EPB=\angle FGD \Rightarrow AB//CD$

(7) 錯角が等しいければ、2直線は平行

$\angle AFG=\angle DGF \Rightarrow AB//CD$

(8) 三角形の内角の和は180°

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

(9) 三角形の外角は、それととなり合わない2つの内角の和に等しい

$\angle ACD = \angle A + \angle B$

(10) 三角形の合同条件
3組の辺がそれぞれ等しい

<仮定> $AB=DE, BC=EF, CA=FD$
<結論> $\triangle ABC = \triangle DEF$

(11) 三角形の合同条件
2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい

<仮定> $AB=DE, BC=EF, \angle B=\angle E$
<結論> $\triangle ABC = \triangle DEF$

(12) 三角形の合同条件
1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい

<仮定> $BC=EF, \angle B=\angle E, \angle C=\angle F$
<結論> $\triangle ABC = \triangle DEF$

(13) 二等辺三角形の底角は等しい

$AB=AC \Rightarrow \angle B=\angle C$

(14) 2つの角が等しい三角形は二等辺三角形

$\angle B=\angle C \Rightarrow AB=AC$

(15) 直角三角形の合同条件
斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい

<仮定> $\angle C=\angle F=90^\circ, AB=DE, \angle A=\angle D$
<結論> $\triangle ABC = \triangle DEF$

(16) 直角三角形の合同条件
斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい

<仮定> $\angle C=\angle F=90^\circ, AB=DE, BC=EF$
<結論> $\triangle ABC = \triangle DEF$

(17) 平行四辺形の定義
2組の対辺がそれぞれ平行

$AB//DC, AD//BC$

(18) 平行四辺形の性質①
2組の対辺がそれぞれ等しい

$AB=DC, AD=BC$

(19) 平行四辺形の性質②
2組の対角がそれぞれ等しい

$\angle A=\angle C, \angle B=\angle D$

(20) 平行四辺形の性質③
対角線はそれぞれの中点を交わる

$AO=CO, BO=DO$

(21) 平行四辺形になるための条件①
2組の対辺がそれぞれ等しい

$AB=DC, AD=BC$

(22) 平行四辺形になるための条件②
2組の対角がそれぞれ等しい

$\angle A=\angle C, \angle B=\angle D$

(23) 平行四辺形になるための条件③
対角線がそれぞれの中点を交わる

$AO=CO, BO=DO$

(24) 平行四辺形になるための条件④
1組の対辺が平行でその長が等しい

$AD//BC, AD=BC$

図1 根拠シート

ウ 証明を書く力の評価の実際

生徒の証明を書く力をワークシートから読み取るために「証明を書く力の評価規準」(表2)から具体的な評価規準を作成し、評価した(表4)。

表4 証明を書く力の評価規準の具体例

命題	「平行四辺形では、対角線はそれぞれの中点を交わる。」ことを証明しよう。
評価	内容
S	<div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>証明)</p> <p>$\triangle ABO$ と $\triangle CDO$ において</p> <p>平行線の錯角は等しいから</p> <p>$\angle ABO = \angle CDO \dots \textcircled{1}$</p> <p>$\angle BAO = \angle DCO \dots \textcircled{2}$</p> <p>平行四辺形の対辺は等しいから</p> <p>$AB = CD \dots \textcircled{3}$</p> <p>$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$より</p> <p>1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから</p> <p>$\triangle ABO = \triangle CDO$</p> <p>合同な図形の対応する辺は等しいから</p> <p>$AO = CO, BO = DO$</p> </div> <p><仮定> $AB//DC, AD//BC$</p> <p><結論> $AO=CO, BO=DO$</p> <p>上記のような証明が、根拠となる事柄を適切に用いて、対応する順序を間違えず書けている。</p>
A	Sのような証明が、根拠となる事柄を適切に用いて書けているが、対応する順序を間違えているかまたは、根拠となる事柄が不十分な場合。 例1)「平行線の錯角は等しいから」を「平行だから」としている場合 例2)「平行四辺形の対辺は等しいから」を「平行四辺形だから」としている場合 例3)「合同な図形の対応する辺は等しいから」を「よって」としている場合
B	証明の流れを筋立てて書けているが、根拠となる事柄が間違っていたり、根拠となる事柄が抜けていたりする。
C1	証明の流れを筋立てて書けていないが、合同となる2つの三角形について記述している。 (「 $\triangle ABO$ と $\triangle CDO$ において」等の記述がある。)
C2	証明の流れを筋立てて書けておらず、合同となる2つの三角形について記述がない。または、未記入の場合。

4 検証授業の分析と考察

(1) 学級全体の変容について

ア 導入時における学習活動の工夫について

生徒の振り返りシート(図2)による4段階の自己評価の結果を集計、分析した。「学習課題はやる気ができましたか。」の設問に対する4または3の肯定的評価に注目した(図3)。第11時では課題設定の工夫は行っておらず、肯定的評価69.7%を基準とする。その他の時間では課題設定の工夫を行ったが、第14時の肯定的評価が62.9%と基準を下回っている。第14時だけは、他の時間と比べても大きく評価が異なっている。それは、この時間の証明が三角形の合同条件を利用しないものであったため、生徒が理解することが難しく、やる気につながらなかったと自己評価したと推察される。しかし、第14時以外の時間では、生徒の肯定的評価がおおむね80%前後を推移している。こ

これは、導入時における学習活動設定の工夫が生徒のやる気を引き出すことに効果的に働いているものと考えられる。

数学 振り返りシート					
1 今日学習を振り返ってあてはまるものを1~4の中から1つずつ選んで、○をつけましょう。					
		あてはまる	まあまああてはまる	あまりあてはまらない	あてはまらない
(1)	学習課題はやる気ができましたか。	4	3	2	1
(2)	学習内容は理解することができましたか。	4	3	2	1
(3)	ワークシートは使いやすかったですか。	4	3	2	1
(4)	根拠シートは役に立ちましたか。	4	3	2	1
(5)	ペアの相手に理由をあげて説明することができましたか。	4	3	2	1
(6)	ペアの相手の説明は分かりやすかったですか。	4	3	2	1
(7)	証明を自分の言葉でまとめることができましたか。	4	3	2	1
2 今日学習を振り返って授業で分かったことや感想などを書きましょう。					

図2 振り返りシート

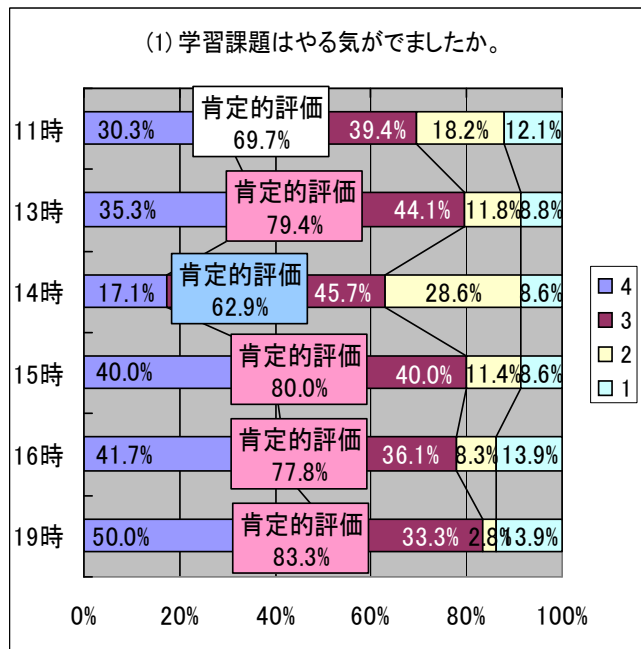


図3 学習課題にやる気をもって取り組めたか

イ 根拠シートの活用について

生徒は、根拠シートを自力解決の場面や伝え合う活動の場面で活用していた。その結果は、振り

返しシートの自己評価の数値（図4）から分かる。「根拠シートは役に立ちましたか。」の設問に対して4または3の肯定的評価をした生徒の割合の平均は88.1%であった。9割近い生徒が、毎時間根拠シートを活用して考えている実態があった。また、生徒の振り返りシートの自由記述欄には、「根拠シートを活用できた。」「根拠シートが、思ったより役に立って便利でした。」（図5）と根拠シートが役立ったことを記述している生徒がいた。

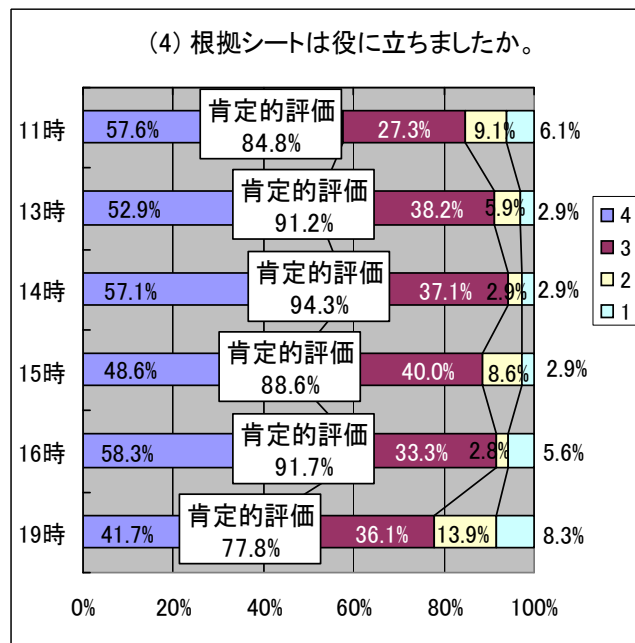


図4 根拠シートが役に立ったか

根拠シートを活用できた。次も頑張りたい。

今日の証明は解くのは難しかったが、根拠シートが、思ったより役に立って便利だった。

図5 根拠シートについての生徒の記述

ウ 証明を書く力の高まりについて

証明を書く力については、表4で示したような評価規準に沿って生徒の書いた証明を評価した。今回の研究では、三角形の合同条件を利用して証明する問題に焦点化し、その証明を書く力について考えた。

図6、図7は、それぞれ初期（第11時）と事後（期末テスト）の証明問題である。

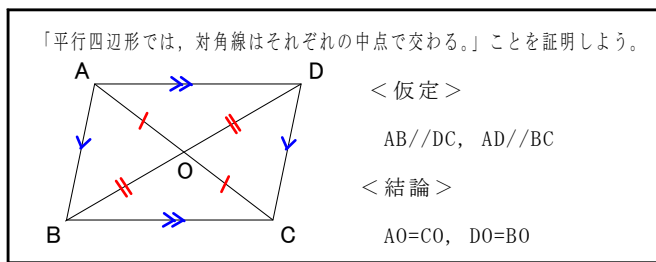


図6 第11時における証明問題

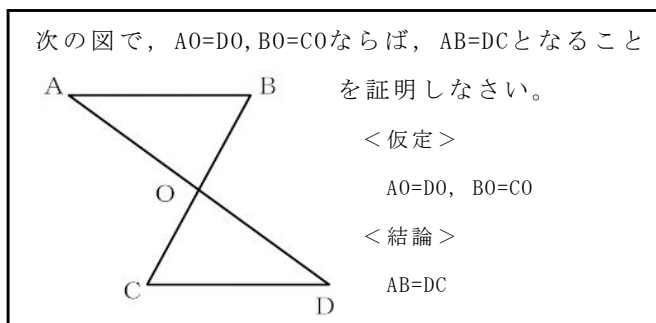


図7 期末テストにおける証明問題

この証明問題に対する記述について、証明を書く力を評価し、クロス集計で比較した(表5)。

表5 証明を書く力のクロス集計表

11時	テスト	段階					計
		C2	C1	B	A	S	
段階	C2	1	1	2	0	0	4
	C1	4	3	3	2	1	13
	B	0	0	2	5	2	9
	A	0	0	0	2	6	8
	S	0	0	0	0	0	0
計		5	4	7	9	9	34

右上(C2/C1~A/S)の部分は、証明を書く力の5段階評価が向上した生徒である。この人数の合計は22名で、かなりの生徒の証明を書く力が向上したといえる。逆に左下の水色の部分は、証明を書く力の5段階評価が下降した生徒である。この人数の合計は4名で少数ではあるが、証明を書く力が下がった生徒がいる結果となった。対角線上の黄色部分は、証明を書く力の5段階評価が変化していない生徒で、その人数は8名であった。

学級全体の傾向として、証明を書く力は学習指

導の工夫に伴って高まっているといえる。また、第11時には「S評価」=「証明が完璧に書けている生徒」は0名だったが、期末テストでは9名に増加した。これも証明を書く力が高まっていることを示している。

(2) 個人の変容について

ア 抽出生徒の決定について

平成25年度の広島県の基礎・基本定着状況調査でのアンケート結果において、数学に関する表現する能力の自己評価が低い生徒の中から通過率が異なる3名の生徒を選び、それぞれを抽出生徒A、B、Cとした(表6)。

表6 抽出生徒について

生徒名	抽出生徒A	抽出生徒B	抽出生徒C
基礎・基本調査通過率	82.6%	69.6%	26.1%
表現する能力の自己評価	まったくあてはまらない	ほとんどあてはまらない	まったくあてはまらない

イ 抽出生徒Aの変容

通過率が80%台であった抽出生徒Aは、初期(第11時)の証明を書く力がB評価であった。事後(期末テスト)では、証明を書く力はA評価となった。その要因について分析すると、次の2点が考えられた。1点目は、伝え合う活動の効果、2点目は、根拠シート活用の効果である。

1点目については、第14時の振り返りシートの記述(図8)から分かる。抽出生徒Aは、伝え合う活動において、周りの人に教え、教えたことで理解してもらった結果、達成感を感じている。この経験が、証明を書く力の高まりに作用していることが推察される。

2点目については、ワークシートに「錯角が等しければ平行」という、明らかに根拠シートの文言を活用している部分が見られた(図9)。このことから根拠シートを活用して証明しようとしたことが、証明を書く力の高まりに作用したことが推察される。

② 今日の学習を振り返って授業で分かったことや感想などを書きましょう。

自分で証明することはできなかったけど、
先生の説明で理解してそれを周りの人に
教えることができました。周りの人も分かった
みたいで、すごい達成感があります

図8 抽出生徒Aの振り返りシートの記述

$\triangle ABC \cong \triangle CDA$
合同な四角形の対応する角は
等しいから $\angle ACB = \angle DAC$ ④
④より、錯角が等しいから2直線が
平行だから、 $AD \parallel BC$ $AB \parallel DC$

図9 抽出生徒Aのワークシートの記述

ウ 抽出生徒Bの変容

通過率が平均的な抽出生徒Bは、ワークシートに根拠シートの6か7を使うというメモを書いていた。この生徒も根拠シートを活用して証明を書こうとしていることが分かる。

その結果、初期ではC1だった評価が、事後にはB評価へと向上した。この抽出生徒Bにも根拠シートの活用の効果があったことが推察される。

エ 抽出生徒Cの変容

通過率が20%台であった抽出生徒Cは、初期(第11時)の証明を書く力がC1評価で、事後(期末テスト)の証明を書く力がC2評価であった。この結果からは、証明を書く力の高まりは見られなかった。

そこでさらに詳しく分析するため、第13時と第15時の評価も含めて比較した。すると、第11時では、C1だった評価が第13時では、C2評価となり、第15時ではA評価となっていた(図10)。

第11時の証明を書く力	第13時の証明を書く力	第15時の証明を書く力
S	S	S
A	A	A
B	B	B
C1	C1	C1
C2	C2	C2

図10 証明を書く力の推移

抽出生徒Cの評価がC1とC2評価になった原因について、授業VTRで伝え合う活動についての様子を見取った。すると、第11時では、後ろのペアと一緒に3名のグループで交流を行っていたことがわかった。この交流は活発に行われていたが、抽出生徒Cの発言はほとんど見られなかった。しかし、後ろのペアの交流を聞いて、証明の書き出し部分を書くことができていた。第13時では、ペアの生徒が話しかけても、抽出生徒Cは上手に交流することができず、高まりが生まれなかったと考えられる。

第15時では、それまでの抽出生徒Cの状況から「見通しをもつことができない」と判断した。そのため、図11のような穴埋め形式のヒントカードを準備し、配布した。その結果、見通しをもって証明を書くことができ、A評価となったと推察される。また、抽出生徒Cは、第15時の振り返りシートで「ヒントカードでなんとなくわかった。」と記述している(図12)。これで、抽出生徒Cの証明を書く力が急激に高まったかというそうではない。事後(期末テスト)はC2評価であったことからわかるように高まってはいなかった。それは、「解説」に記述があるように、一挙に達成できるものではないからである。繰り返し証明問題に取り組み、証明の流れを定着させる必要があることがわかった。

図11 ヒントカード

2 今日学習を振り返って授業で分かったことや感想などを書きましょう。

ヒントカードでななと分かった。

図12 振り返りシートの記述

V 研究のまとめ

1 成果

成果としては、次の4点のことが挙げられる。

1点目は、予想や操作を取り入れた課題設定の工夫が生徒のやる気を引き出すことに効果的であったこと。

2点目は、自力解決の場面や、伝え合う活動の場面での根拠シートの活用によって、生徒の証明を書く力の高まりがみられたこと。

3点目は、伝え合う活動によって、様々な学力の生徒の証明を書く力の高まりがみられたこと。

4点目は、証明を書く力を評価規準に沿って細かく評価することで、見通しをもてない生徒の存在が明らかになり、ヒントカードという具体的な手立てを行うことができたことである。

2 課題

伝え合う活動を設定しても、交流できない生徒がいるために、交流のルールを設定して、安心して自分の考えを伝えられる環境づくりが必要である。また、生徒が書いた証明の中で修正の必要な証明を把握し、評価規準に照らし合わせて、根拠が示されているのか、辺や角の相当関係が正しいのか、三角形の合同条件が正しいのか等を丁寧に授業の中で確認する必要がある。これらのことによって、生徒が自己の証明を改善できるようになることが期待できる。

引用文献

- 1) 文部科学省『中学校学習指導要領解説 数学編』教育出版、平成20年、14頁、16頁
- 2) 文部科学省 前掲書、23頁、95頁

- 3) 相馬一彦『「予想」を取り入れた数学授業の改善』明治図書、1995年、16頁
- 4) 中原忠男『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』聖文社、1995年、223頁
- 5) 文部科学省 前掲書、96頁
- 6) 中原忠男 前掲書、199-202頁
- 7) 文部科学省 前掲書、95頁